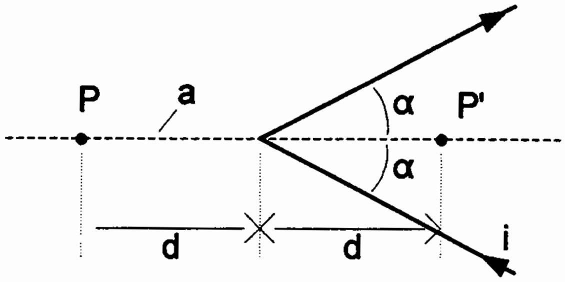
cijfer = (Σ punten)/3 + 1

Opgave 1. In een plat vlak ligt een V-vormige draad waar een stroom i door gaat. Het punt P ligt op een afstand d van het hoekpunt op de lijn a die de hoek van de draad precies doormidden snijdt. De lijn a maakt met beide delen van de draad een hoek α. De grootte van het magneetveld B in het punt P blijkt evenredig te zijn met $\tan(\frac{\alpha}{2})$.



Er geldt dus: $B(P) = k.\tan(\frac{\alpha}{2})$

2 a. Bereken de constante k aan de hand van een speciaal geval voor α.

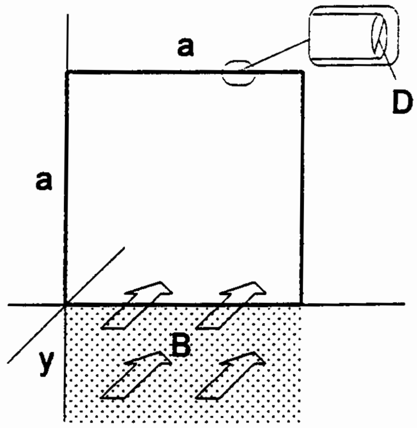
Een punt P' ligt op dezelfde lijn als P maar precies aan de andere kant en op dezelfde afstand d van het hoekpunt van de stroomdraad.

2 b. Laat zien dat het product van de grootte van het magneetveld B' in het punt P' met de veldsterkte B in punt P, onafhankelijk is van α.

In het punt P bevindt zich een magneetje met een dipoolmoment m dat ligt in het vlak opgespannen door de lijn a en het magneetveld in P en dat kan draaien om een as die loodrecht staat op dat vlak. Op een gegeven moment maakt het dipoolmoment van het magneetje een hoek θ met het magneetveld.

1 c. Bereken de potentiële energie van het magneetje als functie van θ.
2 d. Bereken het krachtmoment (koppel) dat het magneetje ondervindt als functie van θ.

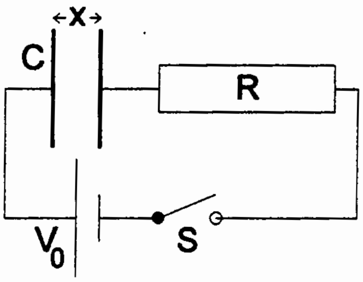
Opgave 2. Een draadraam bestaat uit vier gelijke zijden met een lengte a en een ronde doorsnede met diameter D.
De dichtheid van het materiaal is ρ kg/m^3 en de geleidbaarheidscoëfficiënt is σ Ohm^{-1}m^{-1}.
Het draadraam staat verticaal. De onderkant van het draadraam valt samen met een horizontaal magneetveld B. Op het tijdstip t = 0 laat men het draadraam los zodat het onder invloed van de zwaartekracht naar beneden valt. De afgelegde weg y is een functie van de tijd: y = y(t).



1 a. Bereken de massa m van het draadraam, uitgedrukt in de gegeven grootheden.
1 b. Bereken de elektrische weerstand R van het draadraam.
2 c. Bereken de inductiestroom i als functie van de snelheid v = dy/dt.
2 d. Leidt een differentiaalvergelijking af waaruit de stroomsterkte i als functie van de tijd berekend kan worden. (Geef dus alleen de vergelijking).
2 e. Bereken de stroomsterkte i_0, uitgedrukt in de gegeven grootheden, als deze na verloop van tijd constant geworden is.

zie volgende bladzijde >>>>

Opgave 3. Een ongeladen condensator met capaciteit C is via een schakelaar S in serie geschakeld met een weerstand R en een spanningsbron V_0. Op t = 0 wordt de schakelaar gesloten.



1 a. Geef een vergelijking tussen de stroomsterkte i en de lading Q op de condensator, uitgedrukt in de grootheden C, R en V_0.

Gegeven is dat C = 10 μF; R = 5MΩ en V_0 = 10V.

2 b. Bereken de grootte van de stroomsterkte i op t = 20s.
2 c. Bereken de lading op de condensator op t = 20s.

De condensator is een plaatcondensator, waarvan de afstand x van de platen veranderd kan worden, zodat C = C(x).

3 d. Geef, uitgaande van de spanningsvergelijking voor het circuit, een differentiaalvergelijking als functie van de tijd, waaruit (in principe) de stroomsterkte i berekend kan worden.

Op het tijdstip t = 20s is de plaatafstand x_0. Daarna verandert men de afstand x tussen de platen zodanig dat de stroomsterkte constant blijft.

2 e. Beredeneer - en ondersteun dit met argumenten - of de plaatafstand x moet toenemen of moet afnemen opdat de stroomsterkte constant blijft.
2 f. Bereken de plaatafstand x als functie van de tijd (dus bereken x = x(t)), opdat de stroomsterkte constant blijft.

einde

1a. Speciaal geval: $\alpha = \pi/2$; dan krijgt men een rechte draad waarvoor geldt: $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$.

Voor deze α wordt $\tan(\alpha/2) = 1$, zodat $k = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$

b. In P' vindt men het magneetveld door α te vervangen door $\alpha' = \pi - \alpha$. Dan wordt:

$$\tan\left(\frac{\alpha'}{2}\right) = \tan\left(\frac{(\pi-\alpha)}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ dus volgt: } B(P).B(P') = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\right)^2 = \text{constant}$$

c. $U_{pot} = \vec{B}\cdot\vec{m} = mB\cos\theta$

d. Het koppel $= -\dfrac{dU}{d\theta} = mB\sin\theta$

2a. De massa is $m = 4.a.\pi.\dfrac{D^2}{4}.\rho = \pi\rho a D^2$

b. De weerstand is $R = \dfrac{L}{\sigma A} = \dfrac{4a}{\sigma\pi\frac{D^2}{4}} = \dfrac{16a}{\pi\sigma D^2}$

c. De inductiestroom is $i_{ind} = \dfrac{V_{id}}{R} = \dfrac{-\frac{d\Phi}{dt}}{R}$ Uit de flux $\Phi = Bay$ volgt: $i_{ind} = -\dfrac{Ba}{R}.\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{Ba}{R}v$

d. De inductiestroom levert in het magneetveld een Lorentzkracht. Uit de wet van Newton volgt dan:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - F_L = mg - B.i_{ind}.a = mg - \frac{a^2B^2}{R}v$$

e. Als de stroom constant is, is ook de snelheid constant en is de versnelling $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$. Dan volgt hieruit de

snelheid: $V = \dfrac{mg}{\frac{a^2B^2}{R}} = \dfrac{mgR}{a^2B^2}$ en de inductiestroom $i_0 = \dfrac{aBv}{R} = aB\dfrac{mg}{a^2B^2} = \dfrac{\pi\rho a D^2 g}{aB} = \dfrac{\pi\rho D^2 g}{B}$

3a. $V_0 = iR + \dfrac{Q}{C}$

b. Differentiëren levert: $0 = R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C}$ aangezien $i = \dfrac{dQ}{dt}$. De oplossing van deze vergelijking is:

$i(t) = i_0 e^{-t/RC} = \dfrac{V_0}{R}e^{-t/RC}$. Met de gegeven waarden volgt: $i_{20} = 1{,}34 \,.\, 10^{-6}$ A

c. De lading op de condensator is dan:

$Q = V_{cond}.C = [V_0 - i_{20}R].C = (10 - 6{,}7).10.10^{-6} = 3{,}3.10^{-5}\,C$

d. Uit $V_0 = iR + \dfrac{Q}{C}$ volgt: $0 = R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C} - \dfrac{Q}{C^2}.\dfrac{dC}{dx}.\dfrac{dx}{dt}$

e. De stroomsterkte blijft constant zodat de spanning over de weerstand constant blijft en daardoor ook de spanning over de condensator. De lading op de condensator neemt echter toe zodat de capaciteit ook moet toenemen en aangezien $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{x}$ moet de plaatafstand x afnemen.

f. Methode 1. De stroomsterkte is constant: $\dfrac{di}{dt} = 0$ Uit de differentiaalvergelijking volgt dan:

$$0 = \frac{i_{20}}{C} - \frac{Q}{C^2}.\frac{dC}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{i_{20}}{C} - \frac{Q}{C^2}.\frac{C}{x}.\frac{dx}{dt} \text{ met } Q = Q_{20} + i_{20}t \text{ volgt: } \frac{dx}{x} = \frac{-i_{20}.dt}{Q_{20} + i_{20}t} \text{ zodat } x = x_{20}.\frac{Q_{20}}{Q_{20} + i_{20}t}$$

Methode 2. Vanaf het tijdstip t = 20 neemt de lading lineair toe:

$$Q = Q_{20} + i_{20}t = V_{cond}.C = (V_0 - i_{20}R).C = \frac{Q_{20}}{C_{20}}.C = \frac{x_0}{x}Q_{20} \text{ zodat } x = x_{20}.\frac{Q_{20}}{Q_{20} + i_{20}t}$$